1- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$ ve $\forall (x,y) \in S$ için

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(x,y) = (x,y) \in S$$

$\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \in G$, $\forall (x,y) \in S$ için

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \right)(x,y) = \begin{bmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{bmatrix}(x,y)$$

$$= \left((aa'+bc')x + (ab'+bd')y, (ca'+dc')x + (cb'+dd')y \right)$$

$$= \left(aa'x + bc'x + ab'y + bd'y, ca'x + dc'x + cb'y + dd'y \right)$$

$$= \left(a(a'x+b'y) + b(c'x+d'y), c(a'x+b'y) + d(c'x+d'y) \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(a'x+b'y, c'x+d'y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}(x,y) \right)$$

2- $\mathbb{Z}_{13}^*$ üreteçleri için önce 1 ~~tane~~ bulalım.

$\bar{2}^1 = \bar{2}$

$\bar{2}^2 = \bar{4}$

$\bar{2}^3 = \bar{8}$

$\bar{2}^4 = \bar{3}$

$\bar{2}^5 = \bar{6}$

$\bar{2}^6 = \bar{12}$

$\bar{2}^7 = \bar{11}$

$\bar{2}^8 = \bar{9}$

$\bar{2}^9 = \bar{5}$

$\bar{2}^{10} = \bar{10}$

$\bar{2}^{11} = \bar{7}$

$\bar{2}^{12} = \bar{1}$

o halde $\mathbb{Z}_{13}^* = \langle \bar{2} \rangle$

tüm üreteçler $o(\bar{2}^k) = \frac{12}{(k,12)=1}$

$k = 1, 5, 7, 11$ olup

$\langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{6} \rangle, \langle \bar{11} \rangle, \langle \bar{7} \rangle$ üreteçtir

bölenler ise alt grup olacak

$k \mid 12$ için $k = 1, 2, 3, 4, 6, 12$

alt gruplar $\langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{4} \rangle, \langle \bar{8} \rangle, \langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{12} \rangle$, $\langle \bar{1} \rangle$ dir.

3 — $Z(G) = G$ olduğunu göstermeliyiz.

$Z(G) \neq G$ olsun. $|Z(G)| \mid p^2$ olduğundan $|Z(G)| = 1, p$ olabilir. $|Z(G)| > 1$ olduğundan $|Z(G)| = p$ dir. $a \in G \setminus Z(G)$ ve $H = C_G(a)$ olsun. $Z(G) \leq H$ olup $|Z(G)| < |H| \Rightarrow |H| = p^2 \Rightarrow H = G$ bulunur. $C_G(a) = G$ old. dan $a \in Z(G)$ olur ki çelişki dolayısıyla $G = Z(G)$ bulunur.

4 — $G = A_4$ olsun.

$\alpha = (123)$ için $Cl_G(\alpha) = \{(123), (134), (142), (243)\}$

$C_G(\alpha) = \{(1), (123), (132)\}$

$Cl_G(\alpha) = \{g\alpha g^{-1} \mid g \in G\}$

$C_G(\alpha) = \{g \in G \mid g\alpha = \alpha g\}$

5 — $B = \{gG_a \mid g \in G\}$ olsun. $|B| = [G : G_a]$ old. dan $|B| = |Orb_G(a)|$ old. göstermeliyiz.

$$f : Orb_G(a) \longrightarrow B$$
$$ga \longrightarrow f(ga) = gG_a$$

$ga = ha \Leftrightarrow h^{-1}(ga) = h^{-1}(ha) \Leftrightarrow (h^{-1}g)a = a \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_a \Leftrightarrow gG_a = hG_a$ olup f iyi tanımlı ve 1-1 dir. $\forall gG_a \in B$ için $f(ga) = gG_a$ o şekilde $ga \in Orb_G(a)$ old. f örtendir.